

9. Sompolinsky Y., Zohar A. Secure high-rate transaction processing in Bitcoin. In Financial Cryptography and Data Security. 19th International Conference, FC. 2015. P. 507–527.

This paper is devoted to comparative analysis of the consensus mechanisms based on proof of work and Byzantine fault-tolerance in the context of important properties of Blockchain ledger, such as the node identifiers management and finality of consensus mechanism.

**Key words:** *Bitcoin, Blockchain ledger, consensus mechanism, proof-of-work, Byzantine fault-tolerance.*

Одержано 15.02.2017

УДК 519.6

**Ю. І. Першина**, д-р. фіз.-мат. наук, доцент,  
**О. В. Шилін**, аспірантка

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

### **МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ 3D ОБ'ЄКТА З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ**

Викладено метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою поліноміальної інтерфлетації з використанням відомих томограм (слідів), що лежать на системі довільних площин, який є узагальненням методу відновлення тіла за відовими томограмами на системі трьох груп паралельних площин. Проведений чисельний експеримент цього методу.

**Ключові слова:** *інтерфлетація, відновлення, томограма, сліди.*

**Вступ.** В багатьох областях науки та техніки, таких як медицина, геофізика, електронна мікроскопія, астрофізика, промислова дефектоскопія, діагностика плазми та інших, виникає проблема визначення внутрішньої структури об'єкта найбільш зручним способом. Для її розв'язання в багатьох випадках неприйнятні прямі методи дослідження, що пов'язані з руйнуванням об'єкта. Тому при неруйнівному контролі тривимірних об'єктів, при проведенні наукових досліджень у різних областях науки і техніки тощо, знайшли широке застосування комп'ютерні томографи [1], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру тіла не розрізаючи його. При цьому виник новий клас задач — задач відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відовими його томограмами на декількох площинах.

Виділимо основні риси та особливості томографічних методів. Привабливіша риса полягає у тому, що способи вимірювань не руйну-

ють об'єкт. В переважній більшості математичних моделей у томографії використовується променеве наближення: інформація про середовище «нагромаджується» вздовж променя та реєструється на виході. Невід'ємною рисою томографії є й багаторазове проведення однотипних вимірювань, чим досягається мета отримання достатнього обсягу даних. У силу некоректності задачі томографії їхня недостатність призводить до свавілля в розв'язанні, а неточності у вимірюваннях — до його нестійкості.

В роботах [2, 3] побудовані та досліджені оператори поліноміальної та сплайн-інтерфлетатції [3] функції трьох змінних за відомими слідами на системі трьох груп площин (в кожній групі площини паралельні) і на основі цих операторів розв'язана задача тривимірної комп'ютерної томографії, у випадку, коли відомі томограми в системі трьох груп перерізованих площин (паралельна схема сканування). Доведена висока точність розроблених методів. Відомими є методи розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за допомогою конусоподібної та спіральної схеми сканування, в яких задані площини не є паралельними [4–6].

Робота присвячена розв'язанню та особливостям чисельної реалізації задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі довільно розташованих площин. Розроблений в статті метод є узагальненням методів, розроблених авторами в роботах [2, 3] та є більш точним, ніж відомі методи авторів [4–6].

**Метод відновлення 3D тіла за томограмами, що лежать на системі довільно розміщених площин.** Нехай функція  $f(x)$ ,  $x \in R^3$  описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію  $f(x)$ , тобто про внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір будь-яких  $N$  перерізованих площин  $\Pi_k$ , а також набір томограм  $T_k(\bar{x})$ , які лежать на цих площинах, що задаються наступними рівняннями:

$$\Pi_k : \omega_k(x) = \sum_{p=1}^3 a_{kp} x_p - \gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad \sqrt{\sum_{p=1}^3 a_{kp}^2} = 1.$$

Вважаємо, що в одній точці  $V_{ikl}$  перетинається на більше трьох площини. Позначимо

$$\tau_{ik} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix}.$$

**Лема 1** [3]. Функції  $\omega_i(x), \omega_k(x), \omega_\ell(x)$ , вектори  $\tau_{ik}, \tau_{k\ell}, \tau_{\ell i}$  та координати точки  $V_{ikl}$  задовольняють тотожності

$$x \equiv V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ik\ell}} \omega_\ell(x) + \frac{\tau_{k\ell}}{\Delta_{k\ell i}} \omega_i(x) + \frac{\tau_{\ell i}}{\Delta_{\ell ik}} \omega_k(x).$$

Введемо позначення

$$u_{li}^k(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x), \quad w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x).$$

**Означення 1** [2]. Томограмою  $T_k(\bar{x})$  (слідом функції  $f(x)$ ) на площині  $\omega_k(x) = 0$  за умови, що коефіцієнти  $a_{ki}, i = \overline{1, 3}$  не дорівнюють нулю, будемо називати одну з трьох функцій

$$T_k(x) = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3) / a_{k1}, x_2, x_3), & a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3) / a_{k2}, x_3), & a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_2, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2) / a_{k3}), & a_{k3} \neq 0 \end{cases}$$

Причому для томограм виконуються умови С. М. Нікольського, які на ребрі  $\Gamma_{kl}$  зводяться до перевірки рівностей

$$T_k(u_{li}^k(x)) \Big|_{\omega_l(x)=0} = T_l(u_{li}^l(x)) \Big|_{\omega_k(x)=0},$$

тобто значення томограм, на лінії перетину мають збігатися для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах  $\Gamma_{ik}, \Gamma_{li}$ . В точці  $V_{ikl}$  умови С. М. Нікольського зводяться до перевірки рівностей

$$T_l(u_{ik}^l(x)) \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_k(x)=0} = T_k(u_{li}^k(x)) \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_i(x)=0} = T_i(u_{kl}^i(x)) \Big|_{\omega_k(x)=0, \omega_l(x)=0},$$

тобто значення томограм в точці перетину мають збігатися для всіх томограм, що перетинаються.

**Теорема 1.** Функція  $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega)$

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T(\bar{x})\}, x) &= \left[ L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - \right. \\ &\quad \left. - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k \right] (\{T(\bar{x})\}, x), \\ L_{ik}^l(\{T(\bar{x})\}, x) &= T_l(u_{ik}^l(x)), \quad L_{ik}^l L_{kl}^i(\{T\}; x) = T_k(u_{li}^k(x)) \Big|_{\omega_\ell(x)=0} \\ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{T\}; x) &= T_\ell(u_{ik}^\ell(x)) \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_k(x)=0} \end{aligned} \quad (1)$$

є оператором інтерфлетатії, для якого виконуються умови

$$L_{ikl}(x) \Big|_{\omega_p(x)=0} = f(x) \Big|_{\omega_p(x)=0} = T_p(\bar{x}), \quad p = \overline{1, N}. \quad (2)$$

**Доведення.** У роботі С. М. Нікольського [10] доведено, що для того, щоб існувала функція  $f(x_1, x_2, x_3) \in C^r(\Omega)$ , яка має сліди

$$\left. \frac{\partial^\beta f(x_1, x_2 x_3)}{\partial x_s^p} \right|_{x_s=0} = \varphi_{s,p} \Big|_{x_s=0}, s = 1, 2, 3, p = \overline{0, r},$$

необхідно та достатньо, щоб граничні функції  $\varphi_{s,p}(\bar{x})$  задовольняли в точці  $(0,0,0)$  умовам вигляду

$$\left. \frac{\partial^\beta \varphi_{s,\alpha}(\bar{x})}{\partial x_p^\beta} \right|_{x_p=0} = \left. \frac{\partial^\alpha \varphi_{s,\beta}(\bar{x})}{\partial x_s^\alpha} \right|_{x_s=0}, s, p = 1, 2, 3, \alpha, \beta = \overline{0, r}.$$

Цей факт дозволяє будувати оператори  $L_{ikl}(x)$  у вигляді (1).

**Теорема 1 доведена.**

В роботі визначається інтегральний вигляд похибки відновлення тіла за відомими трьома томограмами. Наведемо наступні твердження без доведень.

**Теорема 2.** Для похибки  $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$  наближеного відновлення внутрішньої структури  $f(x)$  оператором  $L_{ikl}(x)$ , побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_i} \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left( V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l.$$

**Лема 2.** Оператор інтерфлетатції, побудований у теоремі 1, відновлює точно квадратичну функцію.

Розповсюдження результатів на випадок більшої кількості площин ніж три проводиться в теоремі 3 завдяки використанню розкладу одиниці.

**Теорема 3.** Нехай томограми  $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2)$ ,  $r \geq 3$  задовольняють умовам С. М. Нікольського на ребрах і в точці перетину площин. Тоді функція

$$L(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) L_{ikl}(x)$$

є поліноміальним інтерфлетантом із властивостями  $L(x) \in C^r(\Omega)$ .

При цьому  $\forall f(x) \in C^r(\Omega)$ ,  $r \geq 3$ , що задовольняє умовам теореми 1, виконується рівність  $L(x) = Lf(x)$ ,  $f(x) = Lf(x) + Rf(x)$ ,  $R(x)f(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x)$ , де  $R_{ikl}f(x)$  визначається теоремою 2, а

$h_{ikl}(x)$  — допоміжні поліноми, що задовольняють умови  $h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}$ .

**Теорема 4.** Абсолютна неусувна похибка  $E$  побудованого інтерфлетанта в припущенні, що  $f(x)$  на площинах  $\Pi_k$ , тобто відповідні томограми задані наближено  $\delta_k$ , тобто  $|T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x})| \leq \delta_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а також

$$\left| \left| T_k(\bar{x}) \right|_{\Pi_l} - \widetilde{T}_k(\bar{x}) \right|_{\Pi_l} \leq \delta_{ki}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m},$$

$$\left| \left| T_k(\bar{x}) \right|_{\omega_l(x)=0, \omega_l(x)=0} - \widetilde{T}_k(\bar{x}) \right|_{\omega_l(x)=0, \omega_l(x)=0} \leq \delta_{kil}.$$

$$\text{Дорівнює } E \leq \sum_{(i,k,l) \in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i \delta_k + \delta_i \delta_l + \delta_k \delta_l + \delta_i \delta_k \delta_l.$$

**Приклад 1.** За викладеною методикою розроблений комплекс програм у системі комп'ютерної математики *MathCad*. Результати її тестування демонструють високу точність. Продемонструємо результати роботи програми.

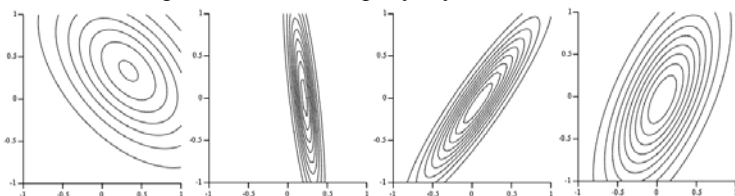
Нехай задані 4 площини  $\Pi_k : \omega_k(x) = 0$ . Коефіцієнти та вільні члени цих площин виведемо у вигляді матриць

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{8}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{66}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} & \frac{-3}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \gamma := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1.7}{\sqrt{66}} \\ \frac{0.5}{\sqrt{26}} \\ \frac{0.2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Площини перетинаються в чотирьох точках

$$V_{243} = \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.075 \\ -0.175 \end{pmatrix}, \quad V_{123} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.7 \end{pmatrix}, \quad V_{124} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.45 \\ 0.45 \end{pmatrix}, \quad V_{243} = \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.075 \\ -0.175 \end{pmatrix}.$$

Про функцію  $F(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$  відомі її сліди на заданих площинах, тобто томограми показані на рисунку.



**Рисунок.** Лінії рівня отриманих з функції  $F(x)$  слідів на заданих чотирьох площинах

За теоремою 4 був побудований оператор інтерфлетації, який використовує лише задані томограми та рівняння площин, на яких лежать томограми.

При перевірці інтерфлетаційних властивостей побудованого оператора, отримаємо лінії рівня, як і в рисунку.

**Приклад 2.** Нехай задані ті ж площини, що й в прикладі 1. Про функцію  $F(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3$  відомі її сліди на заданих площинах, тобто томограми

$$T_1(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_1(x)=0} = x_1^2 - 5x_1 + 5x_2 + 5,$$

$$T_2(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_2(x)=0} = x_1^2 - 40x_1 + 5x_2 + 8.5,$$

$$T_3(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_3(x)=0} = x_1^2 - 20x_1 + 25x_2 + 2.5,$$

$$T_4(\bar{x}) = F(x)|_{\omega_4(x)=0} = x_1^2 - 10x_1 + 15x_2 + 1.$$

За теоремою 4 був побудований оператор інтерфлетації, який використовує лише задані томограми та рівняння площин, на яких лежать томограми. Після спрощення побудований оператор набуває вигляду  $L(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3$ .

**Висновки.** З тестового прикладу робимо висновок, що побудований оператор інтерфлетації за відомими томограмами (слідами) на системі довільно розташованих площин точно відновив квадратичну функцію, чого не можливо досягнути за допомогою операторів інтерполяції, які використовуються в сучасних методах комп'ютерної томографії.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації у випадку відомих томограм, що лежать на системі будь-яких площин, є узагальненням розробленого авторами методу відновлення за відомими томограмами на системі трьох груп перерізаних площин і має таку ж високу точність.

### Список використаних джерел:

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 279 с.
2. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Монографія. Харків, 2008. 160 с.
3. Литвин О. М. Інтерплінація функцій та деякі її застосування. Х.: Основа, 2002. 544 с.
4. Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2002. Vol. 42, N 3. P. 341–352.
5. Пикалов В. В., Лихачев А. В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии. *Вычислительные методы и программирование*. 2004. № 5. С. 170–183.

6. Никольский С. М.. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. *Математический сборник*. 1958. Т. 45(87), № 2. С. 181–194.

Presents the method of restoring the internal structure of three-dimensional body using polynomial interflatation using known tomograms (traces) lying on a system of arbitrary planes, which is a generalization of the method of restoring the body known tomograms on a system of three groups of parallel planes. The numerical experiment this method.

**Key words:** *interflatation, restore, scan traces.*

Одержано 15.02.2017

УДК 681.514:621.029

**І. Р. Пітух\***, канд. техн. наук, доцент,  
**Г. Я. Процюк\*\***, аспірантка,  
**В. Р. Процюк\*\***, канд. техн. наук, доцент,  
**І. Б. Албанський\***, канд. техн. наук

\*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль,

\*\* Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ

## **СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОПЕРАТОРА КОМП'ЮТЕРИЗОВАНОГО КЕРУВАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИМ ОБ'ЄКТОМ НА ОСНОВІ ОБРАЗНО-КЛАСТЕРНОЇ МОДЕЛІ**

Роботу присвячено синтезу структури образно-кластерної моделі інтерактивного моніторингу станів багато параметричних об'єктів керування на основі системи автоматизованого проектування (САПР) алгоритму розпаралеленого опрацювання статистичних даних та кореляційних характеристик технологічних об'єктів.

**Ключові слова:** *образно-кластерна модель інтерактивна комп'ютерна система, керування об'єктом.*

**Вступ.** Актуальною проблемою розв'язання комплексу наукових задач пов'язаних з розвитком теорії вдосконалення методології та техніки побудови в інтерактивних комп'ютеризованих систем (ІРКС) є проблемно-орієнтована структуризація потоків даних та їх опрацювання програмно-апаратними засобами САПР. До складу таких задач входять:

- синтез та оптимізація архітектури ІРКС на основі теоретичних засад та методів побудови комплексу моделей руху даних [1–3];